Funciones

El cálculo estudia relaciones entre cantidades variables que pueden expresarse con números reales .

Ejemplos

- La velocidad de un objeto que cae y el tiempo que lleva cayendo
- La hora del día y la temperatura del aire
- La altura sobre el nivel del mar y la presión atmosférica
- La distancia a una fuente de luminosa y la cantidad de luz que llega
- La edad de una persona y su riesgo de enfermarse
- El volumen de una esfera y su radio

En el caso en que una cantidad variable esté determinada completamente por otra, diremos que la primera es *función* de la otra.

Una **función** de un conjunto A a un conjunto B es una regla que asocia a cada elemento de A un elemento de B. El conjunto A es el **dominio** de la función y el conjunto B es su **codominio** (o contradominio)
Para indicar que **f** es una función de A a B escribimos **f** : $A \to B$, y para decir que f le asigna al elemento a el elemento b escribimos $f(a)=b$.

Ejemplo.
Si H es el conjunto de seres humanos y **N** es el conjunto de números naturales, algunas funciones de H a **N** son

e(h) = *la edad de h*
h(h) = *el numero de hijos de h*
a(h) = *la altura de h*
p(h) = *el peso de h*

Ls funciones deben estar *bien definidas,* de modo que no haya duda de como se calculan. Por ejemplo, hay que indicar si la altura se mide en centímetros (en metros no tendría sentido porque el resultado debe ser un número natural) y si el peso se mide en kilos hay que indicar como se redondea a kilos completos.

Ejemplo. Si T es el conjunto de triángulos y **R** es el conjunto de números reales, algunas funciones de T a **R** son

p(t) = *perímetro de t*
a(t) = *área de t*
r(t) = *radio del circulo circunscrito de t*
h(t) = *altura de* t *no* es una función (no está bien definida porque un triángulo tienen 3 alturas).
Pero m(t) = *altura mayor de t* , y s(t) = *suma de las alturas de t* si son funciones.

El **rango** o **imagen** de una función $f: A \to B$ es el conjunto de valores de la función, es decir, es el conjunto $\{ b \in B \ / \ b=f(a) \text{ para alguna } a \in A \}$.

Ejemplos.

- Si H={seres humanos} y $p : H \to H$ es la función p(h)=*el papa de h,* el rango de p es el conjunto de papás.
- Para la función $p : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ que da la presión atmosférica dependiendo de la altura, el rango es un intervalo $(0,m)$ donde m es la presión a nivel del mar.
- El rango de la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por $f(x)=1+x^2$ es $[1,\infty)$. ya que $1+x^2$ es mayor o igual a 1, y cualquier real mayor que 1 se puede obtener sumándole a 1 el cuadrado de otro número real.

Vamos a centrarnos en las **funciones reales**, que son aquellas cuyos dominios y codominios son conjuntos de números reales (que varían dependiendo de la función o del problema que estemos tratando).

Ejemplos:

- La función a que le asigna a cada real positivo r la circunferencia del círculo de radio r tiene como dominio y codominio al conjunto de reales positivos, así que $c : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ y $c(r) = 2\pi r$.

- La velocidad v de un objeto que cae es una función del tiempo t que lleva cayendo. Si es caída libre en el vacío, la función está dada por $\mathbf{v}(t) = gt$ donde g es una constante gravitacional (si no es en el vacío la función es mas complicada, y si es una caída de grandes alturas aún mas).
  El dominio de la función $\mathbf{v}$ es el intervalo de tiempo en que el objeto cae y el codominio es un intervalo de números reales (negativos, si pensamos que la velocidad de bajada es negativa)

- El riesgo de enfermarse de una persona depende de muchos factores ademas de la edad, pero si queremos saber que tanto depende de la edad y no de la persona o de otros factores podemos considerar el *promedio* de enfermedades entre todas las personas de la misma edad.
  Esto daría una función $p : [0,115] \to \mathbf{R}^+$ y podemos intuir que al aumentar la edad e el riesgo r aumenta, pero para calcular $p(e)$ habría que conocer un montón de datos.

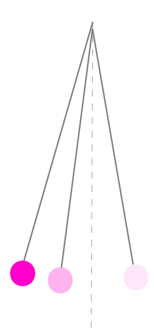
- La presión atmosférica p es una función de la altura h sobre el nivel del mar. $P : [0,100000) \to \mathbf{R}^+$ y sabemos que al aumentar la altura h la presión p disminuye, pero calcular cuanto vale $p(h)$ no es tan sencillo. ¿Podremos adivinar el valor de $p(h)$ sabiendo que disminuye al aumentar h?
  ¿será que $p(h) = c/h$ donde c es alguna constante? ¿O que $p(h) = c(100000-h)$? Estas dos funciones decrecen al crecer h, pero eso no dice que den los valores correctos para cada altura (c/h da valores inmensos cuando h es muy pequeña, y $c(100000-h)$ no da el valor correcto para $h=50000$ para ninguna c (da una presión igual a la mitad de la presión a nivel del mar, pero a 50000 metros la presión es la centésima parte de eso).

- El inverso multiplicativo de un número real r es una función de r, si $r \neq 0$.
  La función inversa $i : \mathbf{R}\text{-}\{0\} \to \mathbf{R}\text{-}\{0\}$ está dada por $i(r) = 1/r$.

- El área de un cuadrado es una función de su perímetro, ya que el lado de un cuadrado de perímetro p es $^p/_4$ por lo tanto su área es $a(p) = (^p/_4)^2$.
  Y el perímetro del cuadrado es una función del área: $p(a) = 4\sqrt{a}$.

- El área de un rectángulo *no* es función de su perímetro, y el perímetro *no* es una función del área, ya que hay rectángulos con el mismo perímetro y distinta área, y también hay rectángulos con la misma área y distinto perímetro.

Ejercicio. El periodo de un péndulo.



Colguemos un objeto pequeño y pesado de una cuerda, jalémoslo a un lado y dejemos que oscile. Al tiempo que tarda en ir y regresar al mismo lugar se le llama el *periodo* del péndulo.

¿De que dependerá el periodo? ¿del peso del objeto?¿del largo de la cuerda? ¿de cuanto se aleje de la vertical? ¿del tiempo que lleva oscilando? ¿o de algo mas?

Es posible definir funciones reales de muchas maneras distintas:

- Combinando operaciones aritméticas, por ejemplo

$f(x) = x^3+3x^2-4x+2$ (Esta función tiene como dominio a todo **R**)

$r(x) = \sqrt{x}$ (Esta función tiene como dominio a $\mathbf{R}^+$, porque no tiene sentido para $r<0$)

$g(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ (Esta función tiene como dominio a **R**-[1], porque no tiene sentido para $t=1$)

- Pegando funciones con distintos dominios, por ejemplo

$v(t) = \begin{cases} 9.8t & \text{si } 0\le t\le 4 \\ 0 & \text{si } 4\le t \end{cases}$ (Esta función da la velocidad de un objeto en caída libre para $0\le t\le 4$ y llega al suelo en $t=4$.)

$a(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0\le x \\ -x & \text{si } x\le 0 \end{cases}$ (Esta función da el valor absoluto de x)

- Dando *indirectamente* el valor de la función por medio de alguna propiedad

Podemos definir d: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ diciendo que $d(x)$ es el denominador de la fracción reducida que da x, si x es racional y $d(x)$ es 0, si x es irracional.

Podemos definir g: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ diciendo que $g(x)$ es el valor de la fuerza gravitacional del sol a una distancia x del sol. Esta es una función bien definida *aunque no sepamos como calcularla*.

Podemos definir f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ diciendo que $f(x)$ es el menor número real que sumado con su cubo de x (sólo hay que checar que ese numero siempre exista, aunque no podamos calcularlo)

Ojo. Los nombres que les demos a las variables o a las funciones *no importan*, lo que importa es la regla de correspondencia.

Ejemplo. Escribir $f(x) = x^2+x$ o escribir $g(s) = s^2+s$ da lo mismo, pero escribir $f(x) = s^2+s$ no tiene sentido.

Si $f(x) = x^2+x$ entonces

$f(2) = 2^2+2$

$f(s) = s^2+s$

$f(n-1) = (n-1)^2+(n-1)$

$f(x^2) = (x^2)^2+(x^2)$ $\quad f(1/x) = (1/x)^2+1/x$

El dominio de una función **f** depende de los valores para los que la función tenga sentido, dependiendo de que signifique. El codominio de la función debe contener a todos los valores posibles de **f**, pero aparte de eso es algo arbitrario. Para las funciones reales 'abstractas' tomamos como dominio al conjunto de números reales para los que la función tenga sentido, y como codominio a **R** o a cualquier subconjunto de **R** que contenga a los valores de la función.

Ejemplo. $f(x) = \sqrt{x+3}$ tiene sentido cuando $x \ge -3$, y siempre toma valores positivos, así que la consideramos como una función f: $[-3,\infty) \to \mathbf{R}$, o como una función f: $[-3,\infty) \to \mathbf{R}^+$.

Problemas.

1. Da 5 funciones distintas del conjunto de polígonos a **R**.

2. Da 3 funciones distintas de **R** a **Z**.

3. Escribe al perímetro y al área de un triangulo equilátero como funciones de su lado.

4. La circunferencia c y el área a del círculo son funciones de su radio r.
Muestra que a es función de c y que c es función de a, y di como calcular estas funciones.

5. Si $f(x) = x+1/x$ calcula

   a. $f(x-1)$ b. $f(3x)$ c. $f(1/x)$ d. $f(x+1/x)$ e. $f(f(x))$

6. Si el largo l y ancho a de un rectángulo varían de modo que el área es siempre 4, escribe a l en función de a.

7. Encuentra el dominio (el mayor posible) de estas funciones reales:

   a. $f(x) = x^2+x$ b. $g(x) = \frac{1}{x^2+x}$ c. $h(x) = \sqrt{x^2+x}$

8. Trata de hallar una función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ que sea decreciente y tal que $f(0)=10$, $f(1)=1$ y $f(10)=0$

9. Si el número de bacterias en un cultivo se duplica cada minuto, cuantas veces mayor será el número de bacterias al cabo de

   a. 5 minutos? b. 10 minutos? c. $^1/_2$ minuto? d. π minutos?

Operaciones con funciones reales

Las funciones con valores reales se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir como si fueran números reales, con muy pocas restricciones:

$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$

$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ *siempre y cuando* $g(x)\neq 0$

Ejemplo. Si $f(x) = x+3$ y $g(x) = x^2-1$ entonces

- $(f+g)(x) = x^2+x+2$
- $(f\cdot g)(x) = x^3+3x^2-x+3$
- $(f/g)(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$ si $x\neq 1,-1$
- $f^2(x) = (3x+1)^2$

Las operaciones pueden ayudar a entender a algunas funciones complicadas viéndolas como combinaciones de funciones mas simples.

Ejemplos.

- La función que da la temperatura ambiente en un lugar en cada momento del año se puede pensar como la suma de una función que depende de la temporada del año y una función que depende de la hora del día

- $f(x) = |x-3|$ mide la distancia de x a 3 y $g(x) = |x+2|$ mide la distancia de x a -2, la función $f+g$ da la suma de las distancias de x a 3 y a -2, la función $f \cdot g$ da el producto de las distancias y la función f/g da la *razón* (la proporción) entre las distancias si $x+2 \neq 0$ (cuando $x=-2$ la razón es infinita).
- Si d es la función que mide la demanda de electricidad de una ciudad a lo largo del día, el suministro debe irse adaptando constantemente para conseguir una función s de modo que la diferencia $g-f$ se mantenga muy cerca de 0 (con valores positivos o negativos) para evitar que la red eléctrica se colapse.

Las operaciones con funciones reales tienen propiedades análogas a las operaciones con número reales, que heredan directamente de ellos:

$f+g = g+f$	la suma de funciones es conmutativa
$f+(g+h) = (f+g)+h$	la suma de funciones es asociativa
$f+0 = f$	donde 0 es la función constante que a cada número le asigna el 0
$f+(-f) = 0$	donde $-f$ es la función dada por $(-f)(x) = -f(x)$
$f \cdot g = g \cdot f$	el producto de funciones es conmutativo
$f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$	el producto de funciones es asociativo
$f \cdot 1 = f$	donde 1 es la función constante que a cada número le asigna el 1
$f \cdot 1/f = 1$	donde $1/f$ es la función dada por $(1/f)(x) = (f(x))^{-1}$ *siempre y cuando* $f(x) \neq 0$
$f \cdot (g+h) = (f \cdot g) + (f \cdot h)$	el producto de funciones se distribuye con la suma

Las propiedades anteriores sugieren que podemos pensar en las funciones como números., que pueden sumarse y multiplicarse aunque no siempre pueden dividirse sin restringir su dominio.

Ejercicio. ¿Podremos pensar en los números reales como funciones?
¿Habrá alguna función del conjunto de números reales **R** al conjunto de funciones reales { f: **R** → **R** } de modo que las operaciones entre números correspondan a las operaciones entre las funciones correspondientes?

Hay otras operaciones para números que se extienden para funciones con valores reales:
Si r y s son números, el número $\max(r,s)$ es el mayor entre r y s.
Si f y g son funciones reales, definimos $\max(f,g)$ como la función $\max(f,g)(x) = \max(f(x),g(x))$

Decimos que una función f es mayor que otra función g, $f>g$ si $f(x)>g(x)$ para toda x. Pero en este caso no vale la tricotomía (si f y g son funciones, f no tiene que ser mayor o menor o igual a g)

Ejemplos.

- Si $f(x)=x$ entonces $\max(f,-f)=|x|$.
- Si $f(x)=x$ y $g(x)=x^2$ entonces $\max(f,g)(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x>1 \\ x & \text{si } 0<x<1 \\ x^2 & \text{si } x<0 \end{cases}$
- Si $f(x)=x$ entonces $\max(f,0)(x) = \begin{cases} x & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}$ y $\min(f,0)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x>0 \\ x & \text{si } x<0 \end{cases}$

Problemas.

10. Si $f(x)= x^2$ y $g(x)=1/x$ calcula a. $f(2x)$ y $2f(x)$ a. $g(1+x)$ y $(1+g)(x)$ c. $f\cdot g$ d. f/g

11. Si $s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ -1 & \text{si } x<0 \end{cases}$ y $r(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x es racional} \\ 1/x & \text{si x es irracional} \end{cases}$ calcula a. $s+r$ b. $s\cdot r$ c. s/r

12. Calcula $\max(f,g)$ y $\min(f,g)$ si a. $f(x)=x$ $g(x)=1-x$ b. $f(x)=x^2+x$ $g(x)=0$

13. Demuestra que cada función f: **R** → **R** es la suma de una función $f^+\geq 0$ y otra función $f^-\leq 0$

14. Si $f(x)=x-1/x$ muestra que $f(-x)=-f(x)$ y $f(1/x)=-f(x)$. ¿Puedes encontrar una función no constante $g(x)$ tal que $g(-x)=g(x)$ y que $g(1/x)=g(x)$?

15. Decimos que una función f: **R** → **R** es **par** si $f(-x) = f(x)$ y que f es **impar** si $f(-x) = -f(x)$.
Di cuales de las siguientes funciones son pares y cuales son impares:

a. $f(x)=x^3$ b. $f(x)=x^2-1$ c. $f(x)=x^2+x$

16. Si f: **R** → **R** es cualquier función, podemos definir dos funciones f_p: **R** → **R** y f_i: **R** → **R** como
$f_p(x)=f(x)+f(-x)$ y $f_i(x)=f(x)-f(-x)$

a. Muestra que $f_p(x)$ es par y que $f_i(x) = - f_i(-x)$ es impar.
b. Muestra que cada función f: **R** → **R** es a suma de una función par y una función impar.

Composición de funciones

Con las funciones reales podemos hacer una operación que no podemos hacer con números:
Dadas dos funciones f y g podemos combinarlas primero aplicando f y luego al resultado aplicarle g.
El resultado es una función, llamada la **composición** de f y g, denotada por g∘f (ojo con el orden).
Así que la composición de f y g es

$$g\circ f\,(x) = g(f(x))$$

Ejemplo: Sea H = {seres humanos}. Si p : H → H está definida por p(x) = *el papá de x*
m : H → H está definida por m(x) = *la mamá de x*

entonces
m∘p : H → H está dada por m∘p(x) = *la mama del papa de x = la abuela paterna de x.*
p∘m : H → H está dada por p∘m(x) = *el papa de la mama x = el abuelo materno de x.*
m∘m : H → H está dada por m∘m(x) = *la mama de la mama x = la abuela materna de x*

La composición de las funciones f y g sólo esta definida cuando la imagen de f está contenida en el dominio de g. Salvo por esto, podemos definir la composición de cualquier número de funciones.

Lema. La composición de funciones (cuando está definida) es asociativa.

Demostración. Si $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ son funciones entonces $h\circ(g\circ f)$ y $(h\circ g)\circ f$ son funciones de A a D y $(h\circ(g\circ f))(a)=h((g\circ f)(x))=h(g(f(a)))=(h\circ g)(f(a))=((h\circ g)\circ f)(a)$ así que las dos hacen lo mismo. •

Ejemplo. Si f, g y h son las funciones reales dadas por $f(x) = x^2$, $g(x) = x+1$ y $h(x) = {}^1/_x$ (para $x\neq 0$) entonces

$g\circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = (x^2)+1 = x^2+1$

$f\circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2+2x+1$

$g\circ g(x) = g(g(x)) = g(x+1)= (x+1)+1 = x+2$

$f\circ f(x) = f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4$

$h\circ g(x) = h(g(x)) = h(x+1) = {}^1/_{x+1}$

$g\circ h(x) = g(h(x)) = g({}^1/_x) = {}^1/_x+1$

$h\circ h(x) = h(h(x)) = h({}^1/_x) = x$

Problemas.

17. Si $f(x) = x^2+x$ y $g(x) = {}^1/_x+1$ calcula las siguientes composiciones (dalas desarrolladas y simplificadas)

a. $g\circ f(x)$ b. $f\circ g(x)$ c. $f\circ f(x)$ d. $g\circ g(x)$ d. $g\circ g\circ g(x)$

18. Escribe a las siguientes funciones como composición de (dos o mas) funciones mas simples

a. $f(x) = (x^2+5x-3)^7$ b. $g(x) = {}^1/_{x^3} - {}^4/_{x^2} + {}^2/_x - 5$ c. $h(x) = \sqrt{(x+3)^7+2/(x+3)}$

19. El radio de un círculo crece de acuerdo con la función $r(t) = \sqrt{t+1}$ ¿cual es el área del círculo en el instante t? ¿Y si el radio crece de acuerdo con la función $r(t) = \sqrt{t} +1$?

20. Si una figura tiene perímetro 5.8 y área 1.3 y se escala la figura por un factor x.

a. Da el perímetro p(x) y el área a(x) de las figuras expandidas, como función de x.
b. Da las áreas de las figuras expandidas como función de sus perímetros.
c. Da los perímetros de las figuras expandidas como función de sus áreas.

Funciones inversas

La **función identidad** en un conjunto A es la función $id_A : A \to A$ dada por $id_A(x)=x$. Como la función identidad no cambia nada, al componerla (antes o después) con cualquier otra función la deja igual.

Podemos preguntarnos si dada una función $f : A \to B$, existirá alguna otra función $g : B \to A$ que deshaga exactamente lo que hizo f. Esto equivale a pedir que $g\circ f = id_A$.

Ejemplos:

- Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ está dada por $f(x) = x+1$ entonces la función $g :: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por $g(x)=x-1$ deshace lo que hace f:
  $g\circ f(x) = g(x+1) = (x+1)-1 = x$
  y si las componemos al revés $f\circ g(x) = f(x-1) = (x-1)+1 = x$

- Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ está dada por $f(x) = x^2$ entonces la función $g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ dada por $g(x)=\sqrt{x}$ parece deshacer lo que hace f, pero no lo hace exactamente: $g\circ f(x) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$
  Si las componemos al revés entonces $f\circ g(x) = f(\sqrt{x}) = x$ así que f deshace lo que hace g.

- Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ está dada por $f(x) = x^3$ entonces la función $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por $g(x)=\sqrt[3]{x}$ deshace lo que hace f: $g\circ f(x) = g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$. También f deshace lo que hace g: $f\circ g(x) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$

- Si $f : \mathbf{R}\text{-}\{0\} \to \mathbf{R}\text{-}\{0\}$ está dada por $f(x) = {}^1/_x$ entonces esa misma función deshace lo que hace f, ya que $f\circ f(x) = f({}^1/_x) = {}^1/_{(1/x)} = x$

Una pregunta natural relacionada con la anterior es:

¿Será cierto que si una variable y es función de otra variable x, entonces x es función de y?

Ejemplos:

- Si x, y son variables reales y $y=x^2$ entonces y es función de x ya que a cada valor de x le corresponde un valor de y, pero x no es función de y porque hay valores de y a los que no les corresponde ningún valor de x (si $y<0$), y hay valores de y a los que les corresponden 2 valores de x (si $y>0$).

- Si x, y son variables reales y $y=x^3$ entonces y es función de x, y x es función de y ya que $x=\sqrt[3]{y}$ da un valor de x para cada valor de y.

Si y es función de x, digamos $y=f(x)$, y queremos hallar a x como función de y, digamos $x=g(y)$, entonces la función g debe deshacer lo que hizo la función f:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "Id"'] & y \arrow[r, "g"] & x \end{tikzcd}$$

Si $f : A \to B$ es una función y existe otra función $g : B \to A$ que deshace lo que hace f y además f deshace lo que hace g (es decir $g\circ f = id_A$ y $f\circ g = id_B$) entonces decimos que g es **inversa** de f.

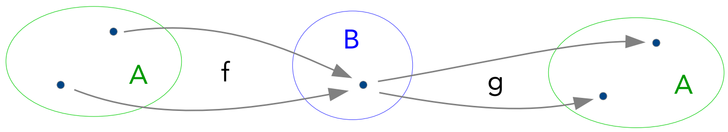
¿Cuantas funciones inversas podrá tener una función?

Lema. Si $f : A \to B$ tiene una inversa entonces solamente tiene una.

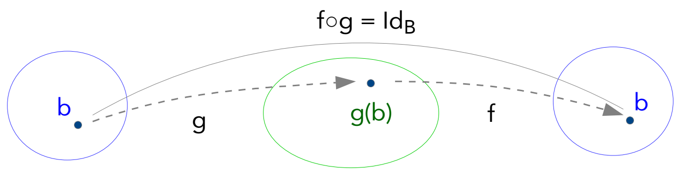
Demostración. Supongamos que $f : A \to B$ tiene dos inversas $g : B \to A$ y $h : B \to A$
Entonces por la asociatividad de la comoposición $g\circ(f\circ h)=(g\circ f)\circ h$ pero como g y h son inversas de f entonces $f\circ h=Id_B$ y $g\circ f=Id_A$ entonces $g=g\circ(f\circ h)=(g\circ f)\circ h=h$ así que $g=h$. •

¿Y cuales funciones tendrán inversas?

Observar que si $f : A \to B$ envía dos elementos de A al mismo elemento de B entonces f no puede tener inversa, porque la inversa tendría que devolver ese elemento de B a los dos elementos de A, pero cada función $g : B \to A$ envía a cada elemento de B a un solo elemento de A.



Y si la imagen de $f : A \to B$ no es todo B entonces f tampoco puede tener inversa, porque si $b \in B$ y no existe $a \in A$ tal que $f(a)=b$, entonces no es posible que $f \circ g = Id_B$ para ninguna función $g : B \to A$ porque entonces $f(g(b))=b$ y esto diría que f envía a $g(b)$ (que está en A) a b.



A una función $f : A \to B$ que envía elementos distintos de A a elementos distintos de B se le llama **inyectiva**. A una función $f : A \to B$ para la que cada elemento de B viene de un elemento de A se le llama **suprayectiva** o **sobre**. Las funciones inyectivas son las que no juntan elementos de A y las funciones suprayectivas son las que llegan a todos los elementos de B.

Ejemplos.

- Si H={ *humanos* } y $p : H \to H$ es la función p(h)=*el papa de h*, entonces p no es inyectiva (ya que hay humanos distintos con el mismo papa) y tampoco es suprayectiva (ya que no todos los humanos son papas).
- Si C={ciudades} y P={países} la función $p : C \to P$ dada por d(c)=*el país donde esta c* no es inyectiva (algunos país tienen varias ciudades, pero p si es suprayectiva (cada país tiene al menos una ciudad).
  La función $c : P \to C$ dada por c(p)=*la capital de p* es inyectiva (las capitales de distintos países son distintas) pero c no es suprayectiva (no todas las ciudades son capitales).
- La función $a : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ que a cada r le asigna el área del círculo de radio r es inyectiva (ya que a radios distintos les corresponden áreas distintas) y es suprayectiva (porque hay círculos de todas las áreas).
- La función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por $f(x)=x+1$ es inyectiva ya que si $f(x)=f(x')$ entonces $x+1=x'+1$ así que $x=x'$ y también es suprayectiva ya que dado cada número real y está en la imagen de f: $f(y-1))=(y-1)+1=y$-

Que una función $f : A \to B$ sea inyectiva o suprayectiva depende tanto de A y de B como de la regla de correspondencia.

Ejemplo. Consideremos a $f(x)=x^2$ con distintos dominios y codominios:

- La función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=x^2$ no es inyectiva ya que que $f(x)=f(-x)$ ni es suprayectiva porque x^2 no toma valores negativos.
- La función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $f(x)=x^2$ no es inyectiva ya que que $f(x)=f(-x)$ pero f si es suprayectiva porque x^2 toma todos los valores mayores o iguales a 0.
- La función $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $f(x)=x^2$ es inyectiva ya que si $x^2=x'^2$ y $x,x' \geq 0$ entonces $x=x'$ y es suprayectiva porque toma todos los valores mayores o iguales a 0: dado $y \geq 0$, $f(\sqrt{y})=(\sqrt{y})^2=y$.
- La función $f : \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Q}^+$, $f(x)=x^2$ es inyectiva ya que si $x^2=x'^2$ y $x,x' \geq 0$ entonces $x=x'$, pero no es suprayectiva porque no todos los números racionales son cuadrados de otros números racionales (por ejemplo no hay ningún x en $\mathbf{Q}$ tal que $x^2=2$.

Ejercicio. Hallar una función $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ que sea inyectiva pero no suprayectiva, y otra función $g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ que sea suprayectiva pero no inyectiva.

Respuesta. Hay muchas, por ejemplo $f(x)=x+1$ y $g(x)=(x-1)^2$.

Ejercicio (mas difícil). Hallar una función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ que sea inyectiva pero no suprayectiva, y otra función $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ que sea suprayectiva pero no inyectiva.

Lema. La composición de funciones inyectivas es una función inyectiva, la composición de funciones suprayectivas es una función suprayectiva.

Demostración. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones. Supongamos primero que f y g son inyectivas. Como $a \neq a'$ y f es inyectiva entonces $f(a) \neq f(a')$. y como $f(a) \neq f(a')$ y g es inyectiva entonces $g(f(a)) \neq g(f(a'))$. Así que si $a \neq a'$ entonces $g \circ f(a) \neq g \circ f(a')$. y esto dice que $g \circ f$ es inyectiva.

Supongamos ahora que f y g son suprayectivas. Como g es sobre, para cada $c \in C$ existe $b \in B$ tal que $g(b)=c$. Y como f es sobre y $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a)=b$, así que $g(f(a))=g(b)=c$. Así que para cada $c \in C$, existe $a \in A$ tal que $g \circ f(a)=c$, y esto dice que $g \circ f$ es suprayectiva. •

Saber si una función es inyectiva o suprayectiva puede ser fácil o difícil, dependiendo de la función.

Ejemplo. Mostrar que la función $\mathbf{f} : \mathbf{R}\text{-}\{2\} \to \mathbf{R}$ dada por $f(x)= x/x-2$ es inyectiva pero no es suprayectiva.

- Para ver si **f** es inyectiva hay que ver que si $x \neq x'$ entonces $f(x) \neq f(x')$.

  Supongamos que $f(x) = f(x')$
  entonces $x/x-2= x'/x'-2$
  así que $x(x'-2) = x'(x-2)$ (multiplicando por $(x+1)(x'+1)$)
  por lo tanto $xx'-x = x'x-x'$
  así que $x = x'$ (restando xx' y multiplicando por -1)

- Para ver si **f** es suprayectiva hay que ver si dado $y \in \mathbf{R}$ existe algún $x \in \mathbf{R}\text{-}\{2\}$ tal que $y=f(x)$, es decir tal que $y = x/x-2$.

  $y = x/x-2$ (aquí y esta en términos de x, necesitamos a x en términos de y)
  $y(x-2) = x$ (multiplicando por $x-2$)
  $yx-2y = x$
  $yx-x = 2y$
  $x(y-1) = 2y$ (factorizando x)
  $x = 2y/y-1$ *siempre y cuando* $y \neq 1$. Así que x existe si $y \neq 1$, por lo que la imagen de **f** es $\mathbf{R}\text{-}\{1\}$
  y **f** no es sobre.

Ejercicio. Considerar las funciones $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^3+x$, $h(x)=x^3+x^2$ ¿Cuales serán inyectivas?¿Cuales serán suprayectivas?

Respuestas: f no es inyectiva ni suprayectiva
g es inyectiva y suprayectiva
h es suprayectiva pero no inyectiva.

Las funciones $f : A \to B$ que son inyectivas y suprayectivas se llaman **biyectivas**.

Lema. Las funciones que tienen inversas son exactamente las funciones biyectivas.

Demostración. Ya vimos que si una función $f : A \to B$ no es inyectiva o no es suprayectiva entonces no puede tener una inversa. Falta ver que si f es biyectiva entonces debe tener inversa $g : B \to A$.
Vamos a definir g. Como f es biyectiva para cada $b \in B$ existe exactamente un $a \in A$ tal que $f(a)=b$. Si definimos $g(b)=a$ entonces $g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = a$ y $f \circ g(b) = f(g(b)) = f(a) = b$. •

A la inversa de una función biyectiva $f : A \to B$ (que es única) la denotamos por f^{-1}.

Ejemplo. Para codificar un mensaje podemos asociarle a cada letra del alfabeto algún símbolo. Si la asociación es una función biyectiva entonces la función inversa decodifica el mensaje (si la asociación no es inyectiva entonces al codificar las letras se confunden y se pierde información. Si la asociación no es suprayectiva entonces hay símbolos que no aparecen en en los mensajes codificados, así que no hacen falta)

Ejemplos.

- La función $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ dada por $f(x)=x^3$ es biyectiva, su inversa es $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$.
- Si $a : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ da el área de círculo como función del radio, entonces $a^{-1} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ da el radio del círculo como función del área.
- La función $i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por $i(x)= \begin{cases} x & \text{si } x\in\mathbf{Q} \\ 1/x & \text{si } x\notin\mathbf{Q} \end{cases}$ es biyectiva, y es su propia inversa.

Aunque cada función biyectiva tiene una inversa, hallarla puede ser muy difícil!

Ejemplos.

- La función $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ dada por $f(x)=x^2+x$ es biyectiva y tiene una inversa $f^{-1}: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ ¿Quien será f^{-1}?

  $f^{-1}(0) = 0$ $\quad f^{-1}(2) = 1$ $\quad f^{-1}(1) = ?$ $\quad f^{-1}(y) = ?$

  Para hallar la inversa de f podemos escribir $y=x^2+x$ y tratar de despejar a x en términos de y (esto diría que cada y viene de alguna x). En este ejemplo $x^2+x-y=0$ es un polinomio de grado 2 en la variable x y podemos usar la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas para hallar x en términos de y:

  $$x= \frac{-1\pm\sqrt{1^2- 4\cdot1\cdot(-y)}}{2\cdot 1} = \frac{-1+\sqrt{1+ 4y}}{2}$$ (porque solo estamos tomando valores positivos de x)

- La función $g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ dada por $g(x)=x^3+x$ también es biyectiva, así que tiene una inversa $g^{-1}: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$

  $g^{-1}(0) = 0$ $\quad g^{-1}(2) = 1$ $\quad g^{-1}(1) = ?$ $\quad g^{-1}(y) = ?$

  y podemos escribir $y=x^5+x$ pero no es nada fácil despejar a x en términos de y (inténtenlo!).

Problemas.

21. ¿Puedes dar algunas funciones inyectivas y/o suprayectivas entre los siguientes conjuntos?

    a. Del conjunto de hombres al conjunto de mujeres

    b. Del conjunto de triángulos al conjunto de reales positivos

    c. Del conjunto de reales positivos al conjunto de triángulos

    d. Del intervalo (0,1] al intervalo [1,∞)

22. ¿Cuales de estas funciones de **R** en **R** serán inyectivas? ¿suprayectivas? ¿biyectivas?

    a. $f(x)=x^4$ b. $g(x)=x^5$ c. $h(x)=x^2+x$ d. $h(x)=x^3+x$ e. $h(x)=x/x^2+1$

23. Encuentra las inversas de las siguientes funciones reales (de su dominio a su imagen)

    a. $f(x)=3x-2$ b. $g(x)=1+1/x$ c. $j(x)=x|x|$ d. $h(x)=2x+|x|$

24. Si las variables reales x, y están relacionadas como se indica (para todos los valores posibles de x y y) ¿y es función de x? ¿x es función de y?

    a. $x^2+y^2=1$ b. $x^2+y^3=1$ c. $x^3+y^3=1$ d. $(y+1)(x+2)=x+3$

Gráficas de funciones

Las gráficas nos dan representaciones visuales de las funciones reales y pueden darnos una idea aproximada de como se comportan.

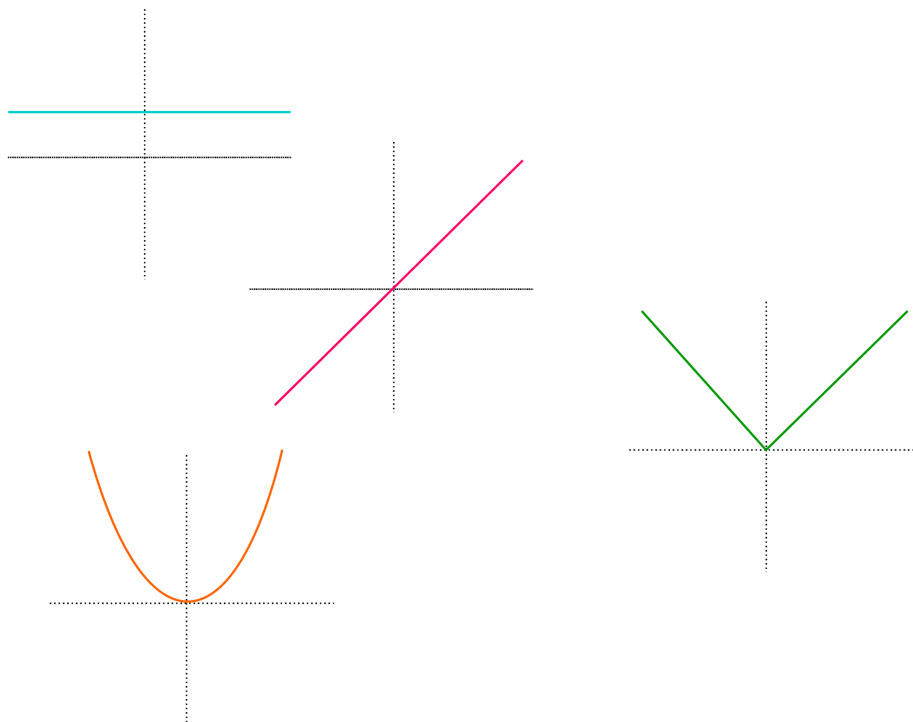
Si $f : A \to B$ es una función entre dos conjuntos de números reales, la **gráfica** de f es el conjunto de pares $\{ (a,f(a)) \ / \ a \in A \}$.

La gráfica de la función es un conjunto de pares de números, que podemos visualizar como un conjunto de puntos en el plano. Aunque la gráfica está formada por una infinidad de puntos, en la practica solo podemos calcular algunos de ellos, y tenemos que tener cuidado para saber como son los demás

Observar que la gráfica de una función no puede tener dos puntos en una misma recta vertical, porque si los tuviera la función tomaría dos valores para el mismo a.

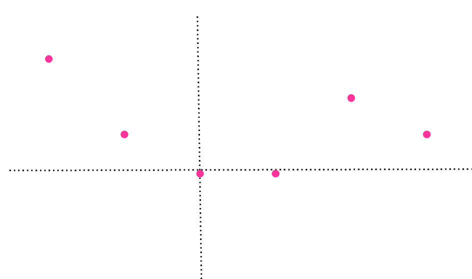
Ejemplos.

- $c(x) = a$
- $I(x) = x$
- $v(x) = |x|$
- $c(x) = x^2$

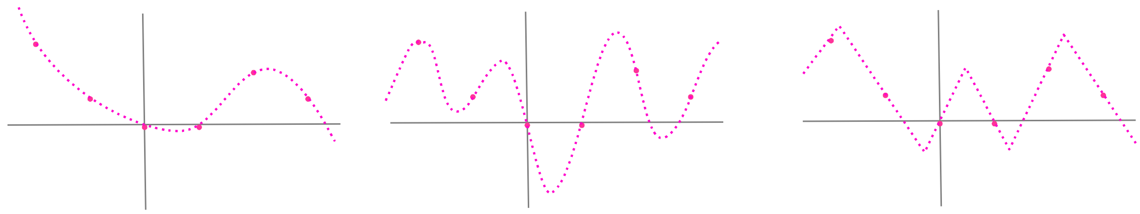


Por mas puntos que dibujemos no podemos estar seguros de que la gráfica sea como creemos, a menos que podamos dar argumentos que lo justifiquen.

Ejercicio. Teniendo estos puntos de una gráfica ¿que podemos decir de la forma de la gráfica completa?

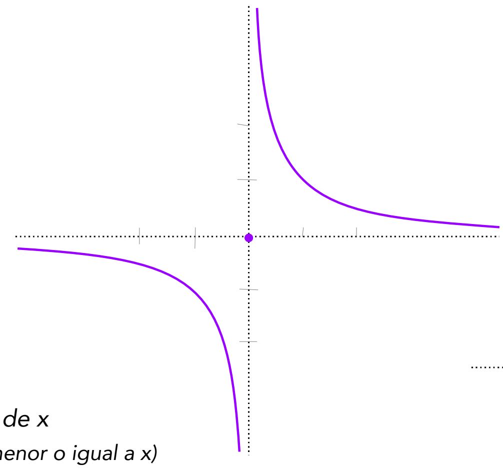


Respuesta: No podemos decir casi nada! podría tener formas muy distintas:

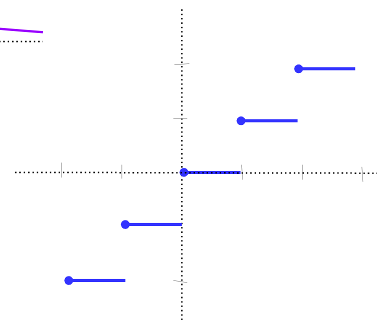


Mas ejemplos.

- $i(x) = \begin{cases} 1/x & \textit{para } x\neq 0 \\ 0 & \textit{para } x=0 \end{cases}$



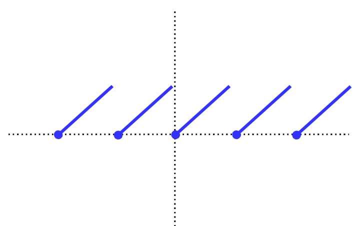
- $e(x) = \lfloor x \rfloor$ *la parte entera de x*
  (el mayor entero menor o igual a x)



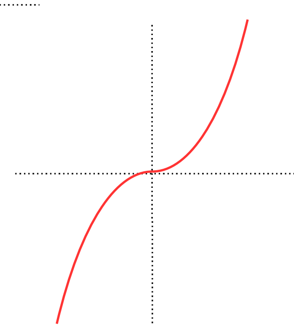
Podemos combinar funciones simples para obtener otras mas complicadas

Ejemplos.

$f(x) = x-\lfloor x \rfloor$ *la parte fraccionaria de x*
(lo que queda de x al quitarle la parte entera)

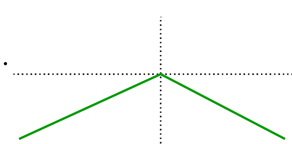


$f(x) = x|x|$ esta función es igual a x^2 para $x>0$
y es igual a $-x^2$ para $x<0$
Así que su gráfica se ve:

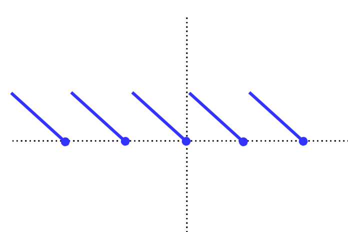


Problemas.

25. Da funciones cuyas gráficas se vean así a.



b.



26. ¿como se ven estas gráficas de estas funciones?

a. $h(x) = |x|+\lfloor x \rfloor$ b. $s(x) = {}^{x}/_{|x|}$ (para $x\neq 0$) c.* $h(x) = x\lfloor x \rfloor$

Funciones polinomiales

Las funciones mas simples son las que se obtienen a partir de la multiplicación y la suma de números reales. De estas, las mas simples son las **funciones lineales**, de la forma $l(x) = ax+b$ donde a, b son reales y $a \neq 0$.

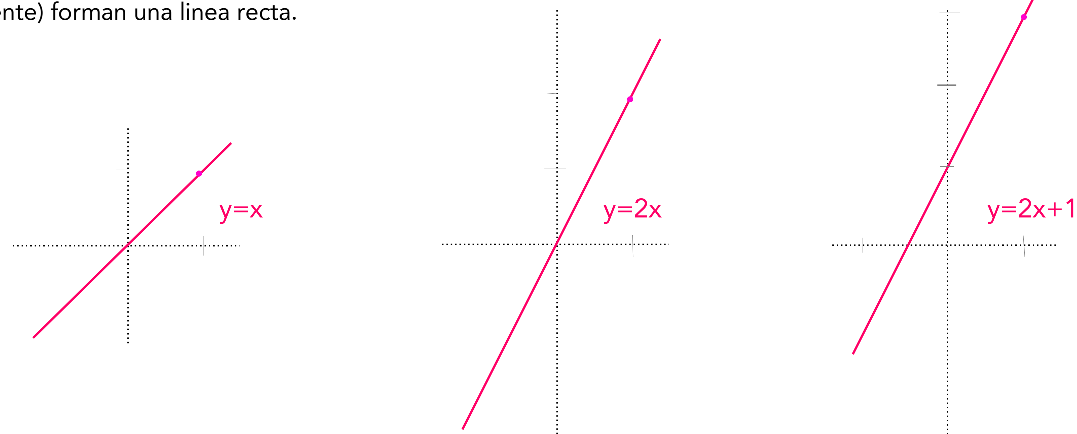
Ejemplos.

- $f(x) = 2x - 1$
- $f(x) = -\sqrt{2}x + \pi$

Lema. Las gráficas de todas las funciones lineales son líneas rectas.

Demostración. Basta saber que los puntos que cumplen $y=x$ forman una linea recta, y que al estirar el plano en cualquier dirección, al reflejarlo o desplazarlo en cualquier dirección las rectas siguen siendo líneas rectas.
Así que los puntos que cumplen $y=ax$ (obtenidos de los anteriores estirando al plano verticalmente, y reflejandolos en el eje x si $a<0$) forman una linea recta, y los puntos que cumplen $y=ax+b$ (que se obtienen de los anteriores desplazandolos verticalmente) forman una linea recta.

Ejemplo.



No es difícil ver que todas las líneas rectas no verticales del plano son gráficas de funciones lineales.

Ejemplo. Hallar una función lineal $f(x)$ tal que $f(1)=3$ y $f(4)=-5$.

La función tiene la forma $f(x) = ax + b$ para algunos reales a y b, pero no sabemos quienes son, hay que hallarlos.

como $f(1)=3$ entonces $3=a\cdot 1+b$ $\quad a+b= 3$ y hay que resolverlas ecuacoiones simultaneas

y como $f(4)=-5$ entonces $-5=a\cdot 4+b$ $\quad 4a+b=-5$

si las restamos queda $\quad -3a \;\; = 8$ así que $a=-\frac{8}{3}$

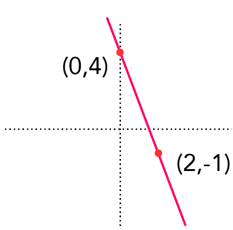
sustituyendo arriba queda $\quad -\frac{8}{3}+b= 3$ así que $b=3+\frac{8}{3}= \frac{17}{3}$

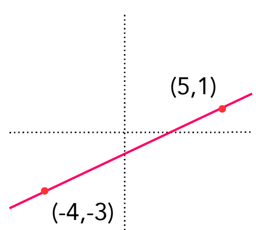
y la función es $f(x) = -\frac{8}{3}x + \frac{17}{3}$

Podemos comprobar que cumple las condiciones requeridas evaluándola:

$f(1) = -\frac{8}{3}(1) + \frac{17}{3} = \frac{9}{3} = 3$ y $f(4) = -\frac{8}{3}(4) + \frac{17}{3} = -\frac{32}{3} + \frac{17}{3} = -\frac{15}{3} = -5$

Ejercicio. Hallar funciones lineales cuyas gráficas se vean así:





Las funciones mas simples después de las lineales son las **funciones cuadráticas**, que son de la forma $c(x) = ax^2+bx+c$ donde a, b, c son reales y $a\neq 0$.

Ejemplos. Algunas funciones cuadráticas son

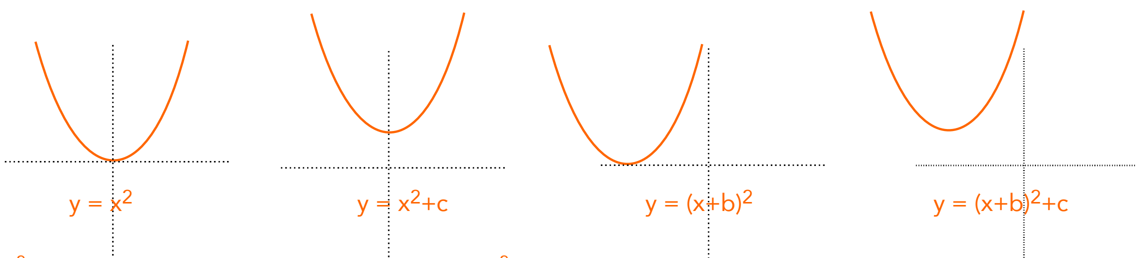
$c(x) = x^2$ $\qquad$ $d(x) = x^2 +2x -4$ $\qquad$ $e(x) = 3x^2 - \sqrt{2}x +\pi$

Una **parábola** es una curva que tiene *exactamente* la misma forma que la gráfica de $c(x) = x^2$, salvo por el tamaño y la posición.

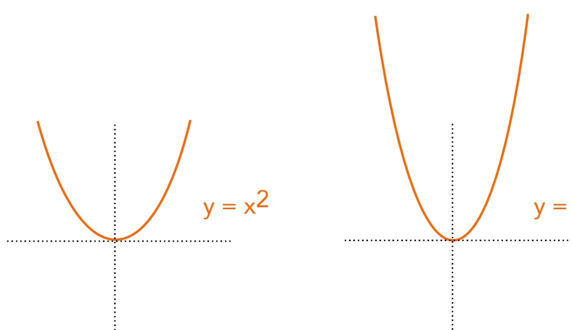
Lema. Las gráficas de todas las funciones cuadráticas son parábolas.

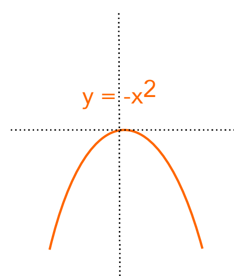
Demostración. Como $y = x^2$ es una parábola y al moverla su forma no cambia, entonces las siguientes curvas son parábolas:

- $y = x^2+c$ (se obtiene de $y = x^2$ desplazándola verticalmente c)
- $y = (x+b)^2$ (se obtiene de $y = x^2$ desplazándola horizontalmente $-b$)
- $y = (x+b)^2+c$ (se obtiene de $y = (x+b)^2$ desplazándola verticalmente c)



$y = ax^2$ se obtiene de estirar verticalmente a $y = x^2$ si a>1 (o encogerla verticalmente si a<1)
$y = -x^2$ se obtiene de reflejar a $y = x^2$ verticalmente





Pero saber que $y = ax^2$ es una parábola estirada no dice que sea una parábola (un cuadrado estirado no es un cuadrado)
Para ver que si, veamos que le ocurre a la curva $y = x^2$ si la achicamos por el factor $\sqrt{a}$ (suponiendo que $a>0$)

Para encoger debemos dividir las magnitudes entre $\sqrt{a}$ haciendo $x'={}^{x}/_{\sqrt{a}}$ y $x=\sqrt{a}x'$.

Así que $x=\sqrt{a}x$ y $y=\sqrt{a}y'$ y entonces $y = x^2$ se convierte en $\sqrt{a}y' = (\sqrt{a}x')^2$ o sea $ay' = a^2x'^2$ que es igual a $y' = ax'^2$

Así que a curva $y = ax^2$ tiene exactamente la forma que la curva $y = x^2$ pero encogida!

Finalmente podemos ver que todas las gráficas de funciones cuadráticas son parábolas:

$y = x^2+bx+c$ es una parábola porque puede escribirse (completando cuadrados) como

$$y= x^2+bx+c = (x+bx+{}^{b^2}/_4) + c-{}^{b^2}/_4 = (x+{}^{b}/_2)^2 + (c-{}^{b^2}/_4)$$

que es de la forma $y=(x+b')^2 + c'$ así que es una parábola.

$y = ax^2+bx+c$ es una parábola ya que puede escribirse como $y = a(x^2+{}^{b}/_a\,x+{}^{c}/_a)$ y ya sabíamos que $y = x^2+{}^{b}/_a\,x+{}^{c}/_a$ es una parábola y que al estirar una parábola verticalmente obtenemos una parábola.

Ejemplo. Hallar una función cuadrática $f(x)$ tal que $f(0)=2$, $f(1)=4$ y $f(2)=3$.

La función debe tener la forma $f(x)=ax^2+bx+c$ para algunos reales a,b,c que hay que encontrar.

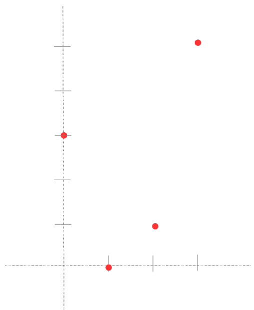
$f(0)=2$ entonces $2=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c$ así que $c=2$

$f(1)=4$ entonces $4=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c$ así que $a+b+c=4 \to a+b=2 \to b=2-a \to b=2-a=\,^7/_2$

$f(2)=4$ entonces $3=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c$ así que $4a+2b+c=3 \to 4a+2b=1 \to 4a+2(2-a)=1 \to 2a=-3 \to a=-\,^3/_2$

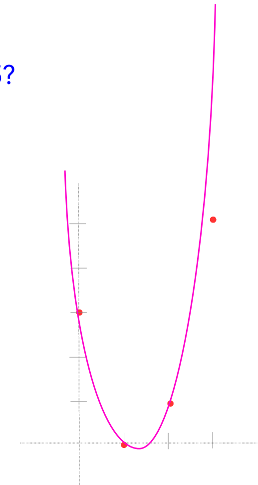
Así que la función es $f(x) = -\,^3/_2\,x^2 + \,^7/_2\,x + 2$

Ejercicio. ¿Existirá una función cuadrática $c(x)$ tal que $c(0)=3$, $c(1)=0$, $c(2)=1$ y $c(3)=5$?



Respuesta: No existe, la única función cuadrática cuya gráfica pasa por los 3 primeros puntos es $f(x)=\,^5/_2x^2-\,^9/_2x+3$

$f(3)=\,^5/_2 3^2-\,^9/_2 3+3=12$ que pasa muy lejos del cuarto punto.



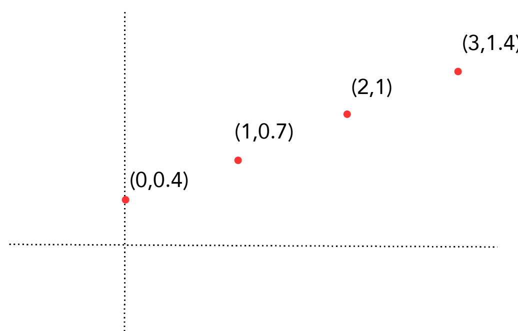
Problemas.

27. Hallar funciones lineales tales que
    a. $f(-2)=7$ y $f(3)=4$.
    b. $(g(\sqrt{2})=\pi$ y $g(\pi)=\sqrt{2}$.
    c. $h(0)\neq 0$ pero $h(h(0))=0$
    d. ¿Cuantas soluciones hay en cada uno de los casos anteriores?

28 a. Si una función lineal toma el valor 7 en 3 y el valor 5 en 8 ¿que valor toma en 11?
b. Si una función lineal toma el valor 7 en 3 y el valor 5 en 8 ¿donde toma el valor 0?

29 a. Muestra que no hay ninguna función lineal que tome exactamente a los valores mostrados ->

b. Encuentra una función lineal que aproxime lo mejor que puedas a esos valores.



30. Encuentra una función cuadrática $c(x)$ tal que $c(0)=1$, $c(1)=2$ y $c(2)=-1$.

31 a. ¿Cuanto es lo menos que puede valer la función $f(x)=x^2+3x$? ¿para que x vale menos?
b. ¿Cual es el valor mínimo de la función $f(x)=x^2-5x+8$? ¿en que punto se alcanza el valor mínimo?
(usar solamente lo que está en esta sección)

Las funciones que se obtienen a partir de la multiplicación y la suma de números reales son las **funciones polinomiales**, que son las de la forma

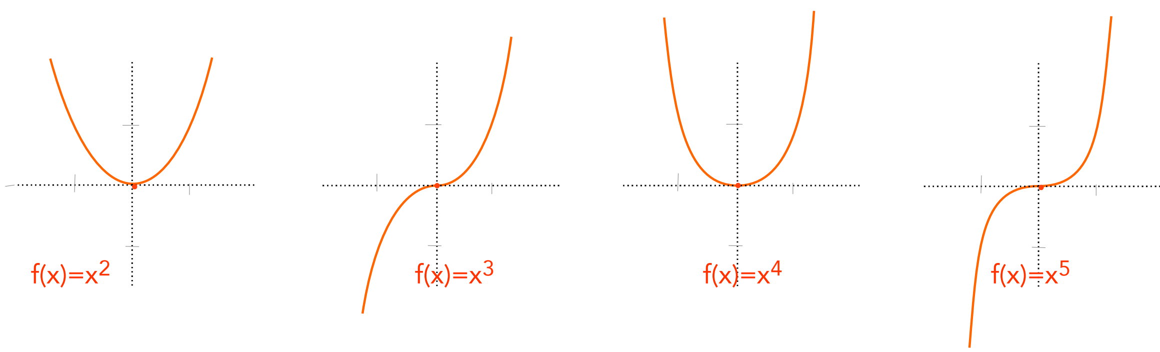
$p(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ donde a_n, a_{n-1}, a_{n-2} ,..., a_2, a_1, a_0 son reales.

El **grado** del polinomio es el exponente mas grande de x con coeficiente distinto de 0. El grado es el indicador mas importante de la complejidad de una función polinomial.

Ejemplos. Algunas funciones polinomiales son

$l(x) = {}^3/_2\, x -5$ $\quad c(x) = -4x^2 +6x +5$ $\quad d(x) = x^3 -7x^2 -4x +2$ $\quad e(x) = \pi x^5 +3x^2 +{}^5/_7\, x$

Algunas de las gráficas de las funciones polinomiales mas sencillas:

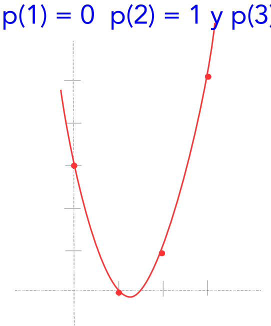


Las gráficas de las potencias pares son simétricas respecto al eje vertical porque $(-x)^n=(x)^n$ y las gráficas de las potencias impares son simétricas respecto al origen porque $(-x)^n=-(x)^n$.
Además en el intervalo $[0,\infty)$ las potencias x^n son funciones *crecientes*: si $x<x'$ entonces $x^n < x'^n$ mientras que en el intervalo $(-\infty,0]$ las potencias impares son crecientes y las potencias pares son *decrecientes*: si $x<x'$ entonces $x^n > x'^n$. Las gráficas de las potencias pares de x *se parecen* a la gráfica de x^2 y las gráficas de las potencias impares de x *se parecen* a la gráfica de x^3, pero no son iguales!

Las funciones polinomiales son muy flexibles, eligiendo el grado y los coeficientes de manera adecuada podemos hacer que tomen valores a nuestro antojo.

Ejemplo. ¿Habrá un polinomio $p(x)$ tal que $p(0) = 3$ $p(1) = 0$ $p(2) = 1$ y $p(3) = 5$?

Uno de grado 1 no hay, porque la gráfica no es una recta, y en un ejercicio anterior vimos que de grado 2 tampoco (aunque los puntos parecen estar en una parábola realmente no lo están).



Probemos con grado 3.
Si $p(x)=ax^3 +bx^2+cx+d$ entonces

$p(0) = 3 \rightarrow d = 3$

$p(1) = 0 \rightarrow a + b + c + d = 0 \rightarrow a+ b + c = -3 \rightarrow c = -a-b-3 \qquad c = {}^1/_6 -{}^5/_2-3=-{}^{16}/_3$

$p(2) = 1 \rightarrow 8a+4b+2c+ d = 1 \rightarrow 8a+4b+2c =-2 \rightarrow 6a+2b = 4 \rightarrow b=-3a+2 \qquad b = {}^5/_2$

$p(3) = 5 \rightarrow 27a+9b+3c+ d = 5 \rightarrow 27a+9b+3c = 2 \rightarrow 24a+6b = 11 \rightarrow 6a = -1 \rightarrow a = -{}^1/_6$

Así que $p(x) = -{}^1/_6x^3 +{}^5/_2x^2 -{}^{16}/_3x +3$.

Los polinomios reales se pueden sumar, restar y multiplicar para obtener otros polinomios, y que estas operaciones tienen las mismas propiedades que las operaciones con números enteros.
Si usamos esto, podemos encontrar polinomios que se ajusten a cualquier conjunto finito de datos.

Lema 1. Si $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ son n números reales distintos, entonces existe un polinomio $p(x)$ de grado n tal que $p(a_i)=0$ para cada i.

Demostración. Si tomamos $p(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)$ entonces $p(a_i)=0$ para cada i. •

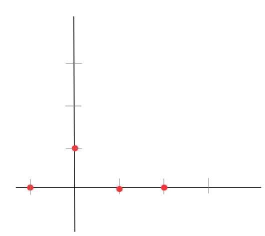
Lema 2. Si $a_0, a_1, a_2,\ldots,a_n$ son números reales distintos y b es cualquier número real entonces existe un polinomio $p(x)$ tal que $p(a_i)=b$ y $p(a_j)=0$ para todo $j\neq i$.

Demostración. Si $b_i=0$ entonces $p(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_i)(x-a_{i+1})\ldots(x-a_n)$ nos sirve.
Si $b_i\neq 0$ tomemos $p(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\ldots(x-a_n)$
Entonces $p(a_j)=0$ si $j\neq i$ y $p(a_i)=(a_i-a_1)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_n)\neq 0$.
Si multiplicamos a $p(x)$ por $b_i/(a_i-a_1)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_n)$ obtenemos el polinomio buscado. •

Lema 3. Dados $n+1$ números reales distintos $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ y cualesquiera $n+1$ números reales $b_0,b_1,b_2,\ldots,b_n$ existe un polinomio $p(x)$ de grado a lo mas n tal que $p(a_i)=b_i$ para cada i.

Demostración.
Por el lema 2, para cada a_i podemos encontrar un polinomio $p_i(x)$ tal que $p_i(a_i)= b_i$ y $p_i(a_j)=0$ para $i\neq j$.
El polinomio que buscamos es su suma, $p(x) = p_0(x)+p_1(x) +p_2(x) +\ldots+p_n(x)$
ya que como $p_j(a_i)=0$ para $i\neq j$ y $p_i(a_i)=b_i$ entonces
$p(a_i) = p_0(a_i)+p_1(a_i) +p_2(a_i) +\ldots+p_i(a_i) +\ldots+p_n(a_i) = 0 + 0 + 0 +\ldots+ b_i +\ldots+ 0 = b_i$ •

Ejercicio. Hallar un polinomio $p(x)$ del menor grado posible tal que $p(-1) = p(1) = p(2) = 0$ y $p(0) = 1$



Podemos hacerlo a pie o usando los lemas.
A pie: Uno de grado 1 no hay, porque la gráfica no es una recta,
y de grado 2 tampoco porque la gráfica no puede ser una parábola
Probemos con grado 3.

Si $p(x)=ax^3 +bx^2+cx+d$ entonces

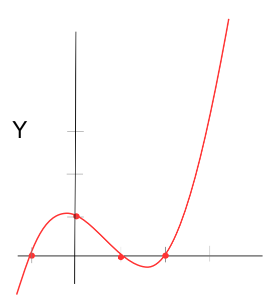
$p(-1)= 0 \rightarrow -a + b - c + d = 0 \rightarrow b+d=0 \rightarrow b=-1$

$p(1) = 0 \rightarrow a + b + c + d = 0 \rightarrow a+c=0 \rightarrow c=-a$ $\qquad c= -{}^1/_2$

$p(2) = 0 \rightarrow 8a+4b+2c+ d = 0 \rightarrow 8a+4(-1)+2(-a)+1=0 \rightarrow 6a=3 \rightarrow a= {}^1/_2$

$p(0) = 1 \rightarrow d = 1$

Así que $p(x)={}^1/_2\, x^3 -x^2-{}^1/_2\, x+1$



Usando el lema 2. Si tomamos $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$ entonces $f(-1) = f(1) = f(2) = 0$ y $f(0) = 2$. Y si tomamos $p(x)={}^1/_2\,(x+1)(x-1)(x-2)$ entonces $p(-1) = p(1) = f(2) = 0$ pero ahora $p(0)=1$.

Observar que ${}^1/_2\,(x+1)(x-1)(x-2) = {}^1/_2\,(x+1)(x^2-3x+2) = {}^1/_2\,(x^3-2x^2-x+2)$ que es el polinomio que obtuvimos a pie.

Aunque no es fácil saber como es la gráfica de un polinomio $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$ a partir de sus coeficientes, si podemos darnos una idea vaga de como se ve *desde lejos*, si no nos fijamos en valores pequeños de x (en valor absoluto) sino que solo nos fijamos en valores grandes.
Para $|x|$ grande la gráfica de $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$ debe parecerse a la gráfica de a_nx^n, que ya conocemos. La idea intuitiva es que si $|x|$ es mucho mas grande que los coeficientes del polinomio entonces el término a_nx^n es mucho mas grande que todos los otros términos juntos, así que a_nx^n es el que cuenta más. Pero cuando $|x|$ es pequeño los otros términos pueden ser mayores y ahí las gráficas no tienen que parecerse nada.
En particular, cuando $|x|$ es muy grande el valor de $|p(x)|$ debe ser muy grande, lo que dice que las funciones polinomiales no están acotadas.

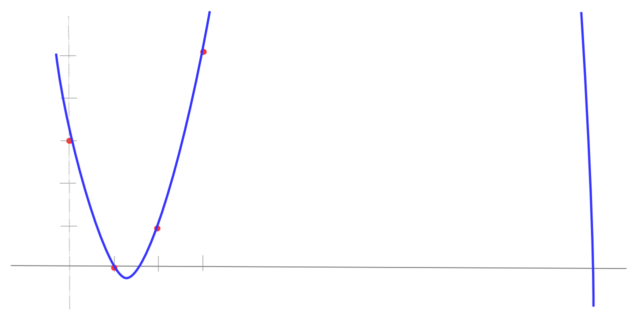
Ojo: cuando decimos que las gráficas *se parecen* hablamos en términos relativos, no absolutos, no decimos que las funciones tengan valores parecidos (que su diferencia sea pequeña) sino que su cociente se aproxima a 1.

Ejemplo. Vista de lejos gráfica de $p(x) = 2x^2+4x-3$ se parece a la gráfica de $c(x)=x^2$
La diferencia entre las dos funciones es $p(x) - c(x) = 4x-3$ que toma valores muy grandes cuando $|x|$ es grande
El cociente entre las dos funciones es $p(x)/c(x) = (2x^2+4x-3) /2x^2 = 2 + 4/x -3/x^2$ y cuando $|x|$ es muy grande $4/x$ y $-3/x^2$ son muy pequeños, así que el cociente se parece mucho a 1.

Ejemplo. El pedazo de gráfica del polinomio

$$p(x) = -{}^{1}/{}_{6}x^3 +{}^{5}/{}_{2}x^2 -{}^{16}/{}_{3}x +3$$

que dibujamos en un ejemplo anterior podría parecernos una parábola, pero como vista de lejos debe parecerse a $p(x) = -{}^{1}/{}_{6}x^3$ después de subir debe volver a bajar!
Esto puede verse dibujando la gráfica de la función para valores mucho mas grandes de x.



Problemas

32. Encuentra dos polinomios *distintos* que satisfagan $p(0)=1$, $p(1)=2$, $p(2)=3$.

33. Encuentra un polinomio $p(x)$ tal que $p(0)=p(1)=p(2)=0$ y $p(3)=p(4)=1$ (sin trabajar de mas)

34. ¿Como se verán las gráficas de los polinomios $r(x) = x^6$ y $s(x) = x^7$ en el intervalo $[-1,1]$?
    Trata de dibujarlas bien a mano y luego checa tu resultado en la computadora.

Las operaciones aritméticas pueden usarse para construir otras funciones mas complejas que los polinomios: Usando la división, podemos considerar las potencias negativas de x y usando raíces podemos considerar potencias fraccionarias:

$$x^{-n}= {}^{1}/{}_{x^n} \qquad x^{1/n}= \sqrt[n]{x} \qquad x^{m/n}= \sqrt[n]{x^m}$$

Ejemplos. $x^{-3}= {}^{1}/{}_{x^3}$ $\qquad x^{1/5}= \sqrt[5]{x}$ $\qquad x^{2/3}= \sqrt[3]{x^2}$

Podemos usar las operaciones aritméticas para combinar todas las potencias de x.

Sumándolas obtenemos funciones como:

$p(x) = -3x^2+4x+2+{}^5/_x - {}^1/_{x^2}$ $\qquad$ $q(x) = 2x^3-7x^{-2}+x^{-5}$ $\qquad$ $r(x) = 2x^3-7x^{-2}+x^{1/5}$

Multiplicándolas obtenemos funciones de esa misma forma, pero dividiendo obtenemos nuevas funciones.

Las **funciones racionales** que son todas las funciones de la forma $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, por ejemplo:

$r(x) = \frac{1}{x^2-1}$ $\qquad$ $r(x) = \frac{2x+3}{4x-5}$ $\qquad$ $s(x)=\frac{x^3-7x^2-4x+1}{2x^2-3x+2}$

Todas las funciones que son sumas de potencias positivas o negativas de x son funciones racionales, pero no todas las funciones racionales son sumas de potencias positivas y negativas de x.

Ejemplo. $p(x) = -3x^2+4x+2+{}^5/_x - {}^1/_{x^2} = \frac{-3x^4+4x^3+2x^2+5x-1}{x^2}$

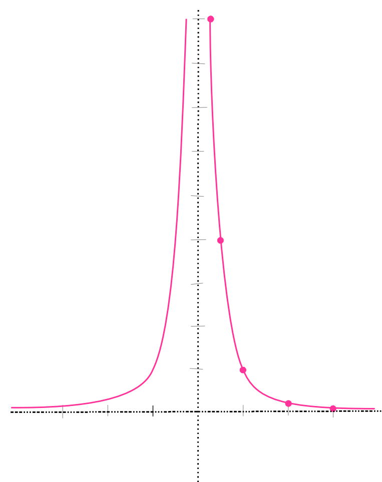
Ejercicio. ¿Como se verá a gráfica de la función $f(x) = x^{-2}$

$f(x) = 1/x^2$ está definida para $x\neq 0$ y podemos ver que la función es siempre >0 y que toma los mismos valores en $-x$ y en x (o sea que la función es par) y su gráfica es simétrica respecto al eje y.

Podemos calcular algunos valores de f:

x	f(x)
$^1/_3$	9
$^1/_2$	4
1	1
2	$^1/_4$
3	$^1/_9$

Si $0<x<x'$ entonces $f(x)>f(x')$ o sea que la función es *decreciente en* $\mathbf{R}^+$.
Lo anterior sugiere, pero no demuestra, que la gráfica se ve así:

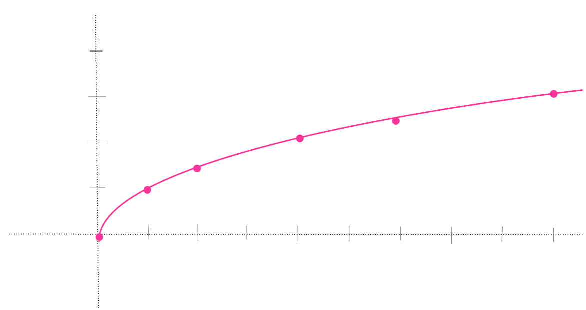


Ejemplo. ¿Como se verá a gráfica de $f(x) = x^{1/2}$

$f(x) = \sqrt{x}$ está definida para $x\geq 0$, f es una función creciente y $f(x)\geq 0$. Y podemos calcular algunos valores de f

x	f(x)
0	0
1	1
2	$\sqrt{2} \approx 1.41$
4	2
6	$\sqrt{6} \approx 2.45$
9	3

así que la gráfica de y f debería verse mas o menos así:



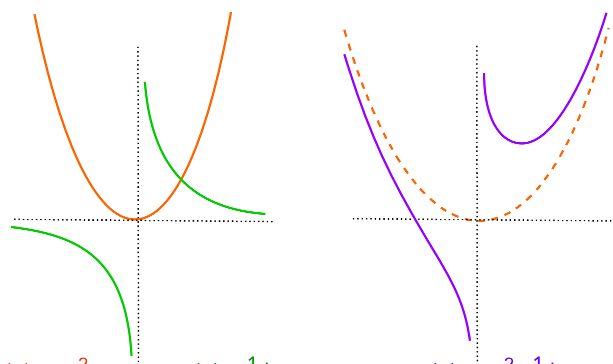
Como las funciones $f(x) = x^n$ para n entero mayor que 0 son crecientes en $\mathbf{R}^+$, sus inversas $f^{-1}(x) = x^{1/n}$ también son funciones crecientes en $\mathbf{R}^+$. Así que las funciones $q(x) = x^{m/n}$ que son la composición de dos de estas funciones también son funciones crecientes en $\mathbf{R}^+$ para m,n enteros mayores que 0.
Y como las funciones $r(x) = x^{-m/n}$ son las recíprocas de las funciones $q(x) = x^{m/n}$ que son crecientes todas las potencias negativas de x son decrecientes en $\mathbf{R}^+$.

Ejercicio. ¿Como se verá la gráfica de $f(x) = x^{3/2}$?

Ejemplo. ¿Como se ven las siguientes funciones cuando $|x|$ es grande?

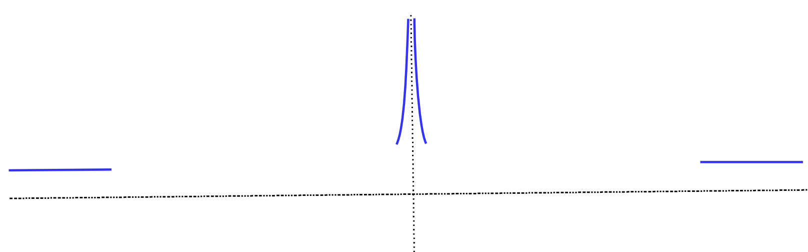
- $r(x) = x^2+{}^1/_x$ si $|x|$ es grande entonces x^2 es muy grande y ${}^1/_x$ es pequeño (en valores absolutos), sí que $r(x)$ se parece mucho a x^2 (pero $r(x)$ no se parece nada a x^2 cuando $|x|$ es pequeño)

  Como $r(x) = x^2+{}^1/_x$ se obtiene sumando las funciones $c(x) = x^2$ y $s(x) = {}^1/_x$, entonces podemos dibujar la gráfica de $r(x)$ "montando" la gráfica de ${}^1/_x$ sobre la de x^2.



$c(x) = x^2$ $s(x) = {}^1/_x$ $r(x) = x^2+{}^1/_x$

- $s(x) = 3-{}^2/_x+{}^1/_{x^2}$ si $|x|$ es grande entonces ${}^1/_x$ y ${}^1/_{x^2}$ son muy pequeños, y $3-{}^2/_x+{}^1/_{x^2}$ se parece mucho a 3
  Si $|x|$ es pequeño entonces ${}^1/_x$ es grande y ${}^1/_{x^2}$ es muy grande, así que $3-{}^2/_x+{}^1/_{x^2}$ se parece mucho a ${}^1/_{x^2}$.
  Esto nos da idea de como se ve la gráfica de $3-{}^2/_x+{}^1/_{x^2}$ en algunas partes, pero no en otras.



Mas adelante veremos como podemos llenar lo que falta de estas gráficas...

En muchas ocasiones solo conocemos algunos valores de una función y a partir de ellos quisiéramos saber cual es la función. Ya vimos que siempre podemos hallar funciones mas o menos sencillas (polinomios) que se ajusten a los valores que tengamos. El problema es que hay una infinidad de polinomios que se ajustan a esos valores (ya que podemos añadir otros valores arbitrarios y hacer que se ajusten también a ellos). Y hay muchísimas otras funciones ademas de los polinomios que también pueden ajustarse a esos valores...

Así que conocer algunos valores de la función nos dice muy poco de la función, a menos que sepamos algo mas sobre ella.

Ejercicio. La siguiente tabla muestra aproximadamente las distancias al sol y los periodos de los planetas (el tiempo que tardan en completar una órbita) comparados con la Tierra. ¿puedes adivinar como depende el periodo de la distancia? es decir ¿quien es p como función de d?

	Distancia	Periodo
Mercurio	0.39	0.24
Venus	0.72	0.61
Tierra	1	1
Marte	1.52	1.88
Jupiter	5.2	11.86
Saturno	9.55	29.42

Si podemos hallar la función correcta entonces podemos predecir los valores de los periodos de los otros planetas

Urano	19.2	?
Neptuno	30.1	?

Respuesta $p=d^{3/2}$ Esta función da los valores 84.13 y 165.14 para los periodos de Urano y Neptuno, que son muy buenas aproximaciones de los valores reales 83.75 y 163.73

Ejemplo. La cantidad de luz que llega a un receptor desde una fuente luminosa depende de la distancia a la fuente. En otras palabras, si d es la distancia y c es la cantidad de luz, entonces $c=f(d)$, ¿pero que función es?

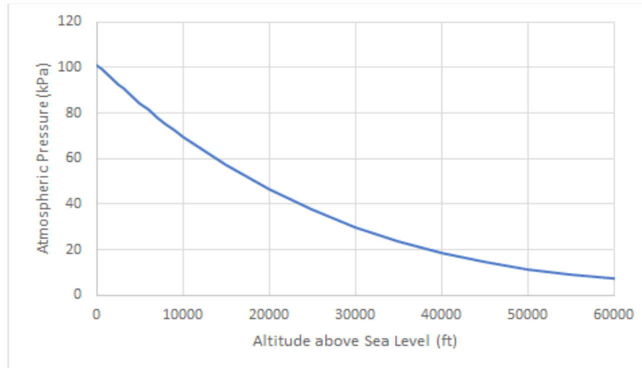
Sabemos que la cantidad de luz disminuye al aumentar la distancia, o sea que f es una función decreciente. Esto descarta a las funciones que potencias positivas de d, que son crecientes.
¿Será que c es proporcional al inverso de d, es decir $c=k/d$ para alguna constante k?
Si fuera así, al aumentar la distancia al doble la cantidad de luz disminuiría a la mitad. Pero el siguiente experimento mental sugiere esto no ocurre. Imaginemos una esfera centrada en la fuente luminosa que atrape toda la luz que salga de ahí, y que hay un receptor que ocupa cierta porción de esa esfera.
Una esfera del doble de radio va a seguir atrapando toda la luz, pero como su área es 4 veces mayor el mismo receptor sólo va a ocupar 1/4 de la porción de la esfera que ocupaba antes, así que la cantidad de luz que recibe es 1/4 de la luz que antes recibía.
Esto sugiere que c es proporcional al inverso del cuadrado de d, es decir $c=k/d^2$ para alguna constante k (y así es realmente).

Ejercicio. Cuando nos acercamos a un poste su tamaño aparente aumenta. El tamaño aparente t debe ser una función de la distancia d a la que lo vemos. ¿pero que función será?

Como al aumentar la distancia el tamaño disminuye, la función $f(d)$ que da t es una función *decreciente* de d.
Así que no puede ser una potencia positiva de d (ni entera ni fraccionaria)
¿será una potencia negativa de d como $t=1/d$ o $t=1/d^2$? ¿o una potencia negativa fraccionaria? ¿o será otra cosa...?

Ejercicio. La gráfica muestra la presión atmosférica **p** como función de la altura **a** sobre el nivel del mar. Hallar una función que se ajuste bien a la gráfica, y que produzca resultados razonables **p** cuando **a** toma valores grandes.

La función debe ser decreciente y debe aproximarse a 0 cuando a aumenta. Esto descarta a las funciones polinomiales. La forma de la gráfica se parece a las de las potencias negativas de **a**, pero cuando la altura **a** se acerca a 0 la presión **p** no debe irse a ∞ sino un valor fijo (100 kPa). Sugerencia: intentar potencias de (a+c) para alguna constante c, o sumas de potencias



http://flysight.ca/wiki/index.php/Geometric_vs._Barometric_Altitude

Problemas

35. Escribe a la función $f(x) = 2x^{3/2} + 3x^{-5/4} + {}^{1}/_{x^{-4/7}}$ sin usar exponentes negativos o fraccionarios.

36. Di para cuales valores de x están definidas estas funciones

a. $f(x) = x^{3/2}$ b. $g(x) = x^{2/3}$ c. $f(x) = x^{-1/3}$ d. $f(x) = (x^2-3)^{-1/4}$

37. Dibuja las gráficas de las funciones del problema anterior (puedes usar ayuda electrónica para hallar algunos de sus valores, pero dibújalas a mano. Luego puedes checar tus resultados con la computadora)

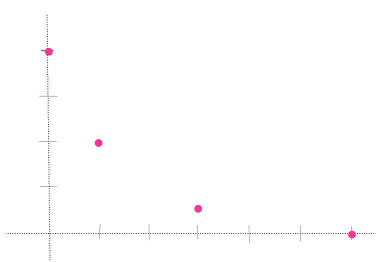
38. ¿Cuales de estas funciones se parecen (en el sentido que su cociente de sus valores se parezca a 1) para valores muy grandes de $|x|$? ¿Y para valores muy chicos de $|x|$?

$f(x) = x^3-2x+3x^{-1}$ $g(x) = x^3 + 3x^{-1}$ $h(x) = x^3 - 2x$ $j(x) = -2x + 3x^{-1}$

39. Dibuja las gráficas de las funciones

a. $f(x) = x+1/x$ b. $g(x) = x^2-1/x$ c.* $g(x) = 1/x+1/x^2$

40. Encuentra alguna función *racional* que tome 3 de estos valores. ¿que tan cerca está del cuarto valor?



41. Encuentra una función racional $r(x)$ que esté definida en *todo* **R** y tal que

a. $r(x)$ siempre sea positiva
b. $r(x)$ tome valores positivos y negativos
c. $r(x)$ esté acotada (no pase de algún valor)
d. $r(x)$ no esté acotada

Problemas de repaso

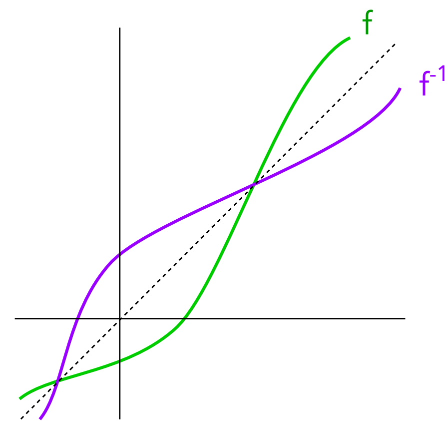
1. Da un valor de x para el cual x^5 sea mas grande que $10x^4+100^3+1000x^2+10\,000x$ y otro valor para el que sea mas chica.

2. a. Da una función racional que siempre sea negativa y se acerque a 0 cuando x sea muy grande.
   b. Da una función racional que este definida en todo **R** se encuentre siempre entre -1 y 1.

3. ¿Que simetrías tienen las gráficas de funciones pares? ¿Y las gráficas de las funciones impares?

4. Las gráficas de las funciones de **R** en **R** cruzan exactamente una vez a cada linea vertical.
   a. ¿que propiedad tienen las gráficas de funciones inyectivas?
   b. ¿y las gráficas de las funciones suprayectivas?
   c. ¿y las de funciones biyectivas?

5. Muestra que si una función f: **R** → **R** tiene inversa, la gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f en la diagonal y=x



6. Esta es la gráfica de la temperatura del aire como función de la altura. Da un polinomio que se vea así.